Interpretation von LGS

Nachdem du ein LGS mit dem Gaußverfahren gelöst hast, ist eine Interpretation der Ergebnisse erforderlich.

Dafür sind allerdings drei unterschiedliche Fälle zu betrachten. Ein lineares Gleichungssystem kann genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen besitzen.

► Gleichungssysteme mit genau einer Lösung

Du hast folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \mathrm{I:} & x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ \mathrm{II:} & x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ \mathrm{III:} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Verwendest du die Matrixschreibweise, löst du das LGS mit dem Gaußschen Eliminierungsverfahren, indem du die Vorfaktoren als Einträgt für die Matrix benutzt. Falls du Probleme mit dem Lösen hast, bearbeite das zugehörige Kapitel.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Du erhälst die Lösung $x_3 = 2,\ x_2 = 1$ und $x_1 = 4$. Diese Lösung ist eindeutig und beschreibt den Punkt $S\,(4\mid 1\mid 2)$. S ist der einzige Punkt, welcher alle drei Gleichungen unabhängig von einander löst.

Die geometrsiche Interpretation: Da es sich bei den Gleichungen $\mathrm{I, II\ und\ III}$ um Ebenengleichungen in Koordinatenform handelt, ist S der einzige Punkt, welcher in allen drei Ebenen liegt.

Da nur dieser Punkt existiert ist er ein Schnittpunkt der drei Ebenen.

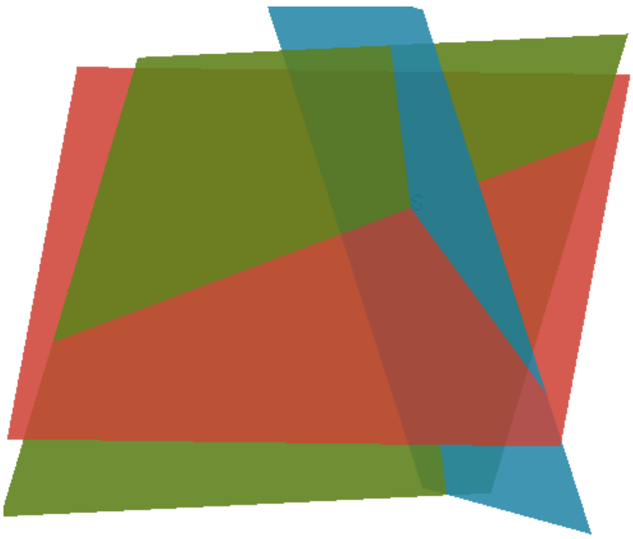

Abb. 1: Eindeutige Lösung

► Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen

Die zweite Möglichkeit, welche dir das Gaußsche Eliminierungsverfahren an Ergebnissen liefert, ist dass das LGS unendliche viele Lösungen hat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In der dritten Gleichung stehen nach dem Gaußverfahren lediglich Nullen. Über die x_3-Koordinate trifft dieses Gleichungssystem keine Aussage. Für diese wählst du eine Variable t. In den übrigen Zeilen steht:

$$\begin{array}{rlllllll}
\text{I}: & x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 2\cdot t & = & 8\\
\text{II}: & & & x_2 & + & 3\cdot t & = & 1\\
\text{III}: & & & & & t & = & t\\
\hline
\text{I}: & x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 2\cdot t & = & 8\\
\text{II}: & & & x_2 & & & = & 1-3\cdot t\\
\text{III}: & & & & & t & = & t\\
\hline
\text{I}: & x_1 & & & & & = & 6+4\cdot t\\
\text{II}: & & & x_2 & & & = & 1-3\cdot t\\
\text{III}: & & & & & t & = & t
\end{array}$$

Du erhälst einen Lösungsvektor $\vec{x}$ in welchem Terme mit t und konstante Terme stehen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6+4\cdot t \\ 1-3\cdot t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\cdot t \\ -3\cdot t \\ 1\cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Du erkennst, dass es sich um eine Geradengleichung handelt. Geometrisch haben die drei Ebenen eine gemeinsam Schnittgerade, welche durch diese Gleichung beschrieben wird.

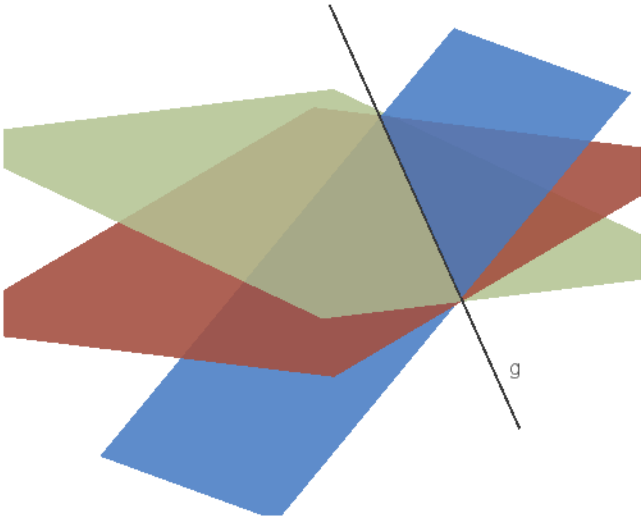

Abb. 2: Unendlich viele Lösungen

► Gleichungssysteme mit keiner Lösung

Du hast ein Gleichungssystem gegeben, welches du erneut mit dem Gaußschen Eliminierungsverfahren löst:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

In der letzten Zeile der Matrix steht $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 1$. Dies ist nicht möglich und das Gleichungssystem hat keine Lösung. Geometrisch interpretiert gibt es keinen Punkt und keine Gerade, welche alle drei Ebenen gemeinsam haben. Dies liegt daran, dass mindestens zwei Ebenen parallel zueinander liegen.

Abb. 3: Keine Lösung

Bildnachweise [nach oben]

[1] © 2016 – SchulLV.
[2] © 2016 – SchulLV.
[3] © 2016 – SchulLV.